懸賞論文 佳作

２銘柄の値動きを活用した値下がりリスクへの対応
－時系列分析を応用したペアトレーディング手法の開発－

宮野 安弘

概　要

株式の売買戦略の立案においては、高い収益を望むこともさることながら、高くなくても安定した収益を求める戦略もありえる。

最近は、よりいっそう市場の透明性の確保や、市場参入障壁を減らすことが求められるようになり、結果として、取引は分秒刻みが求められるようになり、逆にあふれかえる情報に分析が追いつかず振り回される事態も見受けられる。一方で、コンピュータの活用度が一気に増えて、ロボット取引に代表されるように、高度な取引モデルの開発と取引の自動化も大きく増えた。
そこで、自動取引に乗りやすく個別銘柄の値下がりリスクを回避（ヘッジ）する手法として有名になった、ペアトレーディングの応用手法について述べる。

具体的には、あまたの銘柄の中からのグルーピング手法による分類（サブドミナントウルトラ距離法）を用いた銘柄選びと、その銘柄の値動きと相反する銘柄の売買を、現物売買と空売りを組み合わせて、上げ下げ両局面でのさや取りを着実にこなすため、共和分と定常確率過程の平均回帰性を用いて、きめの細かい値下がりリスク回避（ヘッジ）するペアトレーディング手法である。

1. さや取りと相関係数について

株取引で２つの銘柄の値動きの山と谷をできるだけ重ね合わせてポートフォリオ全体で収益率を一定に保つため、銘柄Ａの現物売買と銘柄Ｂの空売りを組み合わせる手法をペアトレーディングというが、これは銘柄Ａの損益を銘柄Ｂでヘッジ（値下がりリスクの回避）していると考える。

二つの銘柄の日々の取引で収益推移を追いかけて、収益を一定に保つのは現実問題としてかなり難しい。

そこで、相関のより低い銘柄で、値動きの少ない銘柄を使ってみる。

図２の銘柄Ａの損益を銘柄Ｃでヘッジを考えると、相関はより低くなっているが、銘柄Ｃの収益が一定に近いので、空売りでヘッジしても、逆に損失が増大してしまっている。

図１のように高い相関係数を持つ二つの株式の値動きは、一時的に差が開くことがあっても、暫くすると、その差をなくそうと価格差が小さくなって、一定期間に同じような動きをする時期が存在する。

その別々の株式の値動きを、同じような動きをする期間で相関があるとか相関が高いといい、この原理を利用して、値上がりと値下がりのタイミングで利益を確保するのがさや取り手法である。さや取り銘柄を選ぶ鍵は相関係数の高さでよむことになるが、高ければ何でもよいというわけでは

図1

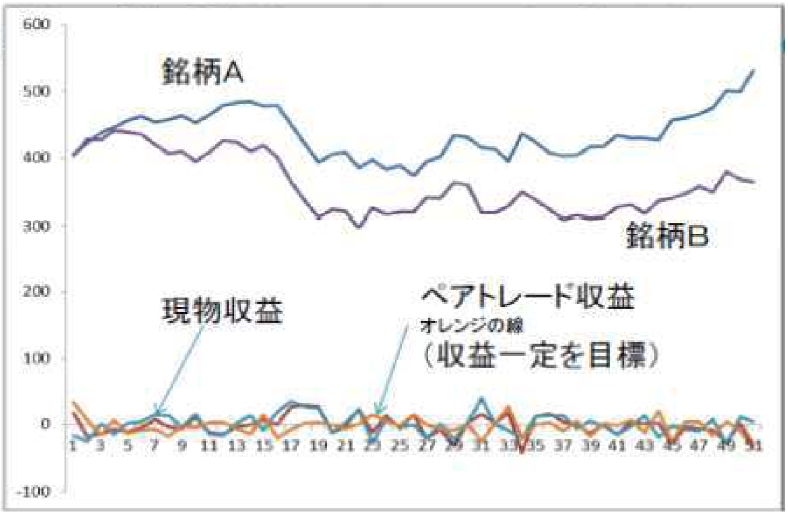


図 1. 銘柄 A と B の株価と日々の収益の推移

図2

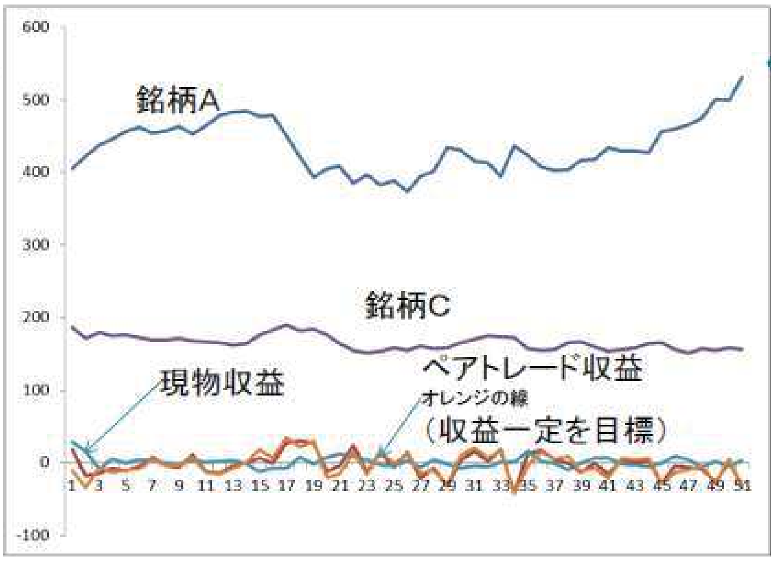


図 2. より相関係数の小さい銘柄 A と C の株価と
日々の収益の推移

表 1-1. 株式銘柄 A と B、C の値動きの分散共分散を計算したものと相関係数行列

分散・共分散行列

	A	B	C
A	1200.013	930.0259	-0.7341
B	930.0259	1847.052	187.8972
C	-0.7341	187.8972	142.2053

相関行列

	A	B	C
A	1	0.775013	-0.00061
B	0.775013	1	0.101728
C	-0.00061	0.101728	1

ない。

表 1-1 と図 1、2 のグラフから、株 A と株 B は株価がよく似た動きをしている。つまり、相関が高いペアといえる。それに比べ株 C と株 A は、あまり同じ動きをしないペア（相関が低い）になってしまっている。

参考までに銘柄 A，B と銘柄 A，C の回帰分析で検証したものを示す。

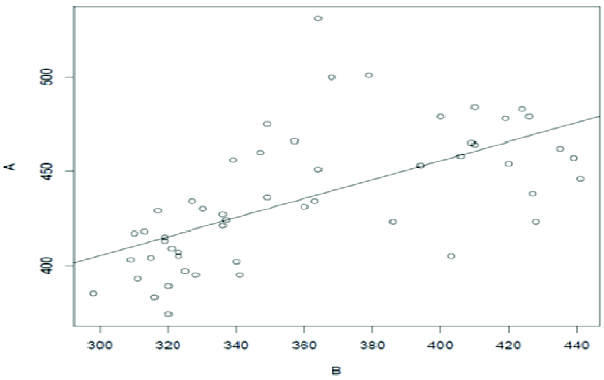


図 3-1　銘柄 A，B の株価の回帰分析

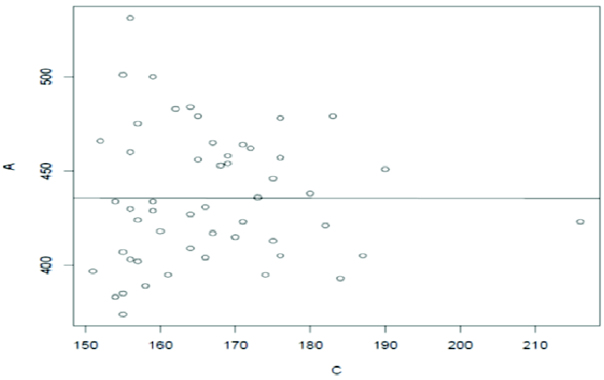


図 3-2　銘柄 A，C の株価の回帰分析

相関係数は－1 ～ 0 ～ ＋1 の範囲で、さや取りに利用できるのは 0.7 ～ 0.95 のあたりがよく使われると言われているが、ほぼ同じような値動きの期間が存在することが重要である。

2. 値下がりリスクのヘッジ

銘柄 A の値下がりリスクをヘッジするために、銘柄 B を 1 対 1 で現物買い＋空売りをして、損益のボラティリティを小さくして、値下がりリスク（損失）を回避（ヘッジ）するのが基本だが、図 4 のように、1 対 1 で売買を行うと値下がりリスクはヘッジできるが、期待収益（平均）の確保に対しては逆効果といえる。

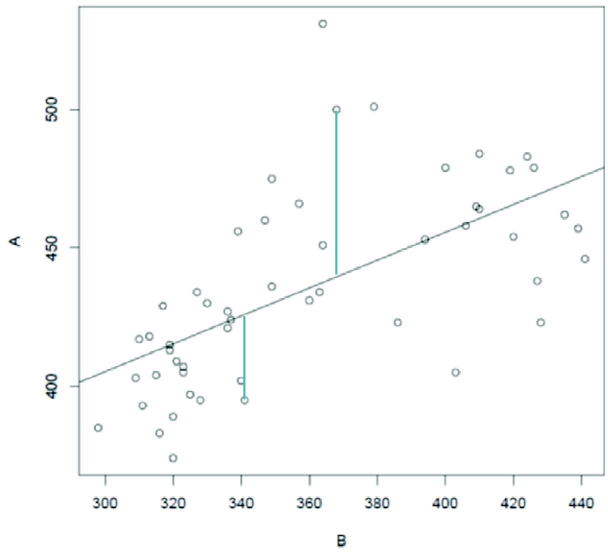
そこで、銘柄 A に対して、銘柄 B を 1 対 h で枚数（株数）を h 枚あてて、ヘッジの程度を調整しながらリスク最小化枚数を探す方法をとる。

表 2-1.　銘柄 A，B のヘッジ収益

銘柄	平均収益	分散
A	-2.1176	15.7102
B	0.4314	16.7277
ヘッジ後	-2.5490	13.0794

表 2-2.　銘柄 A，C のヘッジ収益

銘柄	平均収益	分散
A	-2.1176	15.7102
C	1.1765	7.1721
ヘッジ後	-3.2941	16.7277



※統計ソフトR（2.15.2）を使用

図 4.　銘柄 A と銘柄 B の単回帰分析の結果

つまり t 期の銘柄 A の株価 A_t と銘柄 B の株価 B_t から、最小二乗法により単回帰

$$A_t = \alpha + hB_t + u_t \tag{2-1}$$

の式を求め、回帰係数 h を求めれば、株価のボラティリティが最小になることで、リスク最小化枚数＝回帰直線の傾き h となる銘柄 B の取引枚数がわかることになる。（u_t は誤差項）

・図 4 の分析結果から At＝254.23＋0.503529 ×Bt＋ut

表 3. リスク最小化枚数 h でヘッジした場合

	A	B	C	D	E
1		銘柄Aの価格差	銘柄Bの価格差	1対1ヘッジ	ボラティリティ最小化ヘッジ
32		16	41	−25	−4.64432
33		2	0	2	2
34		18	−9	27	22.53168
35		−41	−21	−20	−30.42608
36		12	12	0	5.95776
37		17	14	3	9.95072
38		4	14	−10	−3.04928
39		−1	−6	5	2.02112
40		−13	5	−18	−15.5176
41		−1	−3	2	0.51056
42		−16	−14	−2	−8.95072
43		4	−3	7	5.51056
44		1	13	−12	−5.54576
45		2	−19	21	11.56688
46		−29	−3	−26	−27.48944
47		−4	−8	4	0.02816
48		−6	−10	4	−0.9648
49		−9	8	−17	−13.02816
50		−26	−30	4	−10.8944
51		1	11	−10	−4.53872
52		−31	4	−35	−33.01408
53					
54	平均	−2.1176	0.4314	−2.5490	−2.3349
55	分散	15.7102	15.9512	13.0794	12.0444
56	標準偏差	3.9636	3.9939	3.6165	3.4705
57					

※Microsoft EXCEL2010を使用

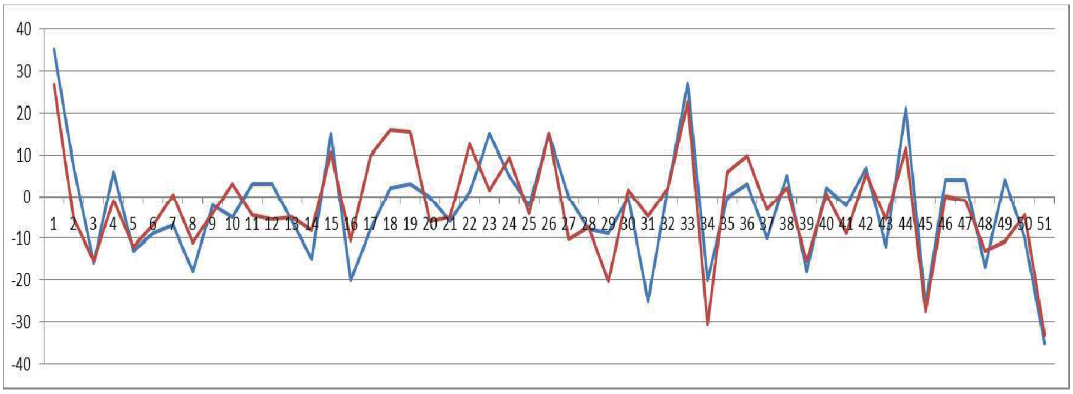


図 5. ヘッジ比率が異なる時の収益推移

・つまり A を 1 株に B を 0.50352 枚ヘッジすればよいとわかる

ここで、表 3 に示したように、銘柄 A に対して、銘柄 B を 1 対 h で枚数（株数）を h 枚あてて、ヘッジの程度を調整しながらリスク最小化枚数 h を探した結果；

$A_t = 254.23 + 0.50352 \times B_t + u_t$ つまり A を 1 株に対して B を 0.50352 枚買うなり、空売りするなりしてヘッジした結果は次のようになる。

・ボラティリティは確かに小さくなっているが、期待収益（平均）はさほど改善していないことがわかる。

・ただし 1 対 1 ヘッジの効果（赤）に対して、ヘッジ比率 h の効果がどれくらいのものかを図 5

に示す。
・赤；ヘッジ比率ｈの効果
・青；１対１ヘッジの効果

で示したもので、ヘッジ比率ｈの方が収益全体のブレが小さくなっていることがわかる。

3. ヘッジの過程は確率過程

ヘッジの効率を改善することで、さらに改善できないか？考察してみると、二つの銘柄の値動きがどのような相関関係をもつのか詳しく調べるだけでなく、時系列の動きも考慮にいれる必要がないか？　を考える。
時系列分析で重要なのは株価の動きや、収益の推移が定常確率過程かどうか？という点である。

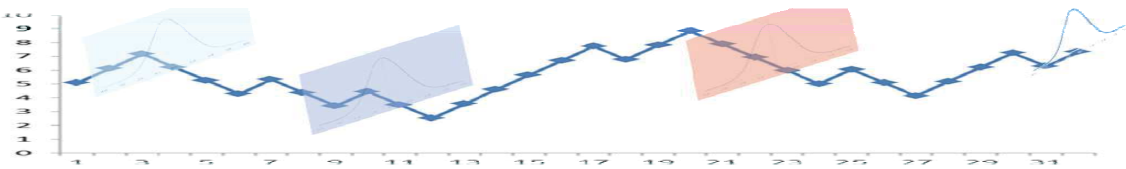
・銘柄 A，B の値動きは定常過程
　⇒　相関係数も意味をもつ
・銘柄 A，B の値動きは非定常過程
　⇒　相関係数は意味をもたない

ということになる。
例えば、時系列の期毎に誤差の分布が変わったらどうなるか？　つまり、

・同じ正規分布だとしてもパラメータ（μ、σ）が変わったらどうするか？（図 6-b）
・正規分布じゃない確率分布になってしまったらどうするか？（図 6-c）

ということである。
これに対して、定常確率過程かどうかの判別の最重要ポイントは、誤差項の分散が不均一分散になっているかどうかだが、暴騰、暴落の時期が含まれる時系列の扱いでは、誤差項の分散が暴騰暴落の時期を含めた時に、ボラティリティが大きく変化してしまう場合をどの程度まで検出できるかにある。
誤差項の分散が過去の誤差項の分散に影響を受けると仮定すると、

・単位根検定　ADF（Augmented Dickey-Fuller; 拡張 D-F 検定）自己回帰 AR（p）モデルでの誤差項がホワイトノイズではなく系列相関がある場合を検定する
・見せかけの回帰の発生の除去（共和分関係の検定）
　独立した２つの確率過程 $\{x_t\}_{(t\geq1)}$、$\{y_t\}_{(t\geq1)}$ の回帰分析に相関が存在するように、決定係数 R や t 値、F 値が有意になるような値を取った現象（見せかけの回帰）の回避をする



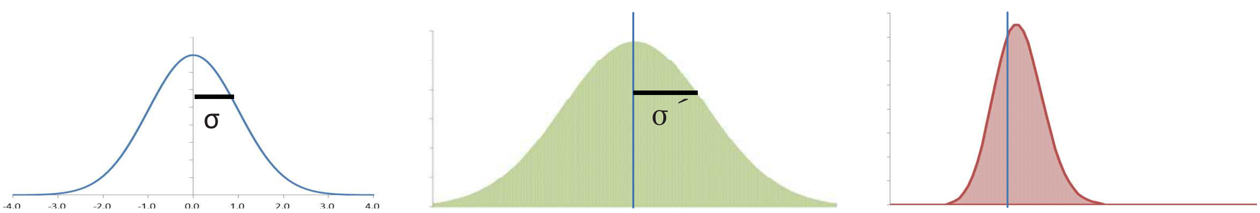


図 6-a　　図 6-b　　図 6-c

⇒　Johansen 検定等をおこない、定常確率過程かどうか検定できれば、使える時系列分析手法が決まってくる。

観測値そのまま（つまり生データ）では、単位根過程でないことが多いのだが、独立した確率過程 $\{y_t\}_{(t\geq 1)}$ が非定常確率過程である場合、定常状態に変換するため階差をとる。1 階の階差を Δy_t とおくと、

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \qquad (3\text{-}1)$$

Δy_t が定常確率過程であると判別されれば、これは単位根過程といえる。

1 階の階差をとって定常過程になる確率過程を $I(1)$ と呼ぶ、したがって、d 階の階差で初めて定常過程が成立する確率過程は $I(d)$ と表記する。

観測値の階差が定常過程であれば、時系列分析の代表格の自己回帰移動平均モデルが使える。

①観測値がみるからに非定常確率過程である場合、定常状態に変換して分析ツールにかけるため、階差をとる。1 階の階差を Δy_t とおくと、

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

2 階の階差は

$$\Delta^2 y_t = \Delta(y_t - y_{t-1}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} \qquad (3\text{-}2)$$

として計算できる

② 1 階の階差が確率変数の列 $\{\Delta y_t\}_{t\geq 1}$ に対し誤差項 $\{u_t\}_{t\geq 1} \sim i.i.d\,(0, \sigma^2)$ が存在し、Δy_t の自己回帰パラメータ ϕ_i、誤差項の指数パラメータ θ_j をとると、自己回帰移動平均 ARMA モデルは、ARMA（1,1,1）※をモデルにすると、

$$\Delta y_t = c + \phi_1 \Delta y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \qquad (3\text{-}3)$$

と表せる。これを ARIMA（1,1,1）※という。

同様に 2 階階差も同じように $\Delta^2 y_t$ を使った式に変形できる

※ARIMA; Auto Regressive Integrated Moving Average　一般式は ARIMA（p,d,q）

※元のデータ系列を株価の対数 $logP_t$ とすれば、$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = logP_t - logP_{t-1}$ となり、一階階差は株価の対数収益率を計算していることに他ならない。

毎日あるいは毎週、過去 50 期～ 100 期程度の複数銘柄データの回帰分析をおこなうのは煩わしい話なので、カルマン・フィルターにかけると、一期先予測とフィルタリングを交互に繰り返しながら、パラメータ ϕ_i、θ_j を毎期更新しながら推定値 $\widehat{y_t} = \Delta\widehat{y_t} + \widehat{y_{t-1}}$ を算出してくれることになる。このカルマン・フィルターの機能は、ARIMA のプログラムの中にはどのソフトウェアでも内蔵されている。また、ARIMA はベクトルでも計算できるので Δx_t、Δy_t の階差カルマン・フィルターでヘッジパラメータも逐次更新計算できることを利用できる。

4. ペアトレーディングのモデル化

4-1. 共和分と定常確率過程の平均回帰性

独立した確率過程 $\{y_t\}_{t\geq 1}$ が非定常確率過程であり、1 階の階差 Δy_t が定常確率過程になると、$I(1)$ と表した。

一般に二つの銘柄の値動きを表す確率過程 $\{x_t\}_{t\geq 1}$、$\{y_t\}_{t\geq 1}$ での線形結合 $ax_t + by_t$ は $I(1)$ に従う場合が多い。ところが $ax_t + by_t$ が定常過程 $I(1)$ になってしまうことがある。このとき 2 つの x_t と y_t は共和分の関係にあるという。そして、その係数（a，b）を共和分ベクトルと呼ぶ。

線形結合 $ax_t + by_t$ が定常過程ならば、（a，b）＝（－ β，1）として定数項－ α を加えた $\{y_t - \beta x_t - \alpha\}$ という系列も定常確率過程になる。（2-1）式で書くと、

$$A_t = \alpha + hB_t + u_t$$
$$A_t - \alpha - hB_t = u_t \qquad (4\text{-}1)$$

これを$I(1)$同士の系列A_t、B_tを線形モデルに当てはめて、その残差u_tが$I(1)$にならなければ（定常過程$I(0)$になっていれば）二つの系列は共和分の関係にあるという。

二つの株式の損益C_t、D_tが共和分の関係にある、つまり線形結合C_t+sD_tが定常過程の時、その系列は平均回帰性という性質を持つことになる。

二つの系列が共和分になっているならば、線形結合の係数の組合せである共和分ベクトルはいくらでも考えられることになるので、通常の分析では、係数を一意に定めるために$a=1$、$b=0$とか$a^2+b^2=1$のようなパラメータ制約をつけて議論する。

さらに平均回帰性について述べる。

時間の経過につれて$|C_t+sD_t|$（図7の青線）が非常に大きくなっても、さらに時間が経過すればC_t+sD_tの値はその平均（期待値）である$E(C_t+sD_t)$という値（図7の赤線）の近くに戻ってくるという性質である。

したがって、共和分関係にある二つの株式の収益率C_t、D_tと共和分ベクトルを探して、毎日$|C_t+sD_t|$の値を計算しつつ、

a. 値が大きく外れたところで、買いと空売りのようなポジションをとり
b. 戻ってきた段階でポジションを精算する

これをくりかえすことで、大きく損失を減らし安定した収益（図7の黄線）を上げることが可能になる。このような投資戦略を一般的にペアトレーディングと呼んでいる。

4-2. モデル構築のStep

本来のペアトレーディングは、CAPMに代表される市場ポートフォリオの平均の動きに沿って、リスク最小化ヘッジ比率を探す目的で作られたものである。

したがって、個別銘柄のポジションを前提に日経平均やTOPIXとのリスク最小化ヘッジ比率を求めることで、期待効用を最大にすることが目的であった。

しかし、日経平均そのものやTOPIXの値そのものは直接取引できないので、インデックス銘柄である日経平均先物等をペアトレーディングに使う手法もある。その場合、市場ポートフォリオの平均値と個別銘柄の値動きの相関から直接リスク最小化ヘッジ比率を計算することになり、期待効用の計算においてモデルの評価方法が若干異なってくる。

ここでは、あくまで実際に現物買いや空売りもできうる個別銘柄を探して、自分がヘッジしたい銘柄の期待効用を最大にするためにペアトレーディングができる手法について述べる。

二つの証券を比較して、このような売買のシナリオが描けるペアを見つけるモデルを組む。

＜Step-1＞銘柄選び

1. で相関係数を比較して、高い相関係数を持

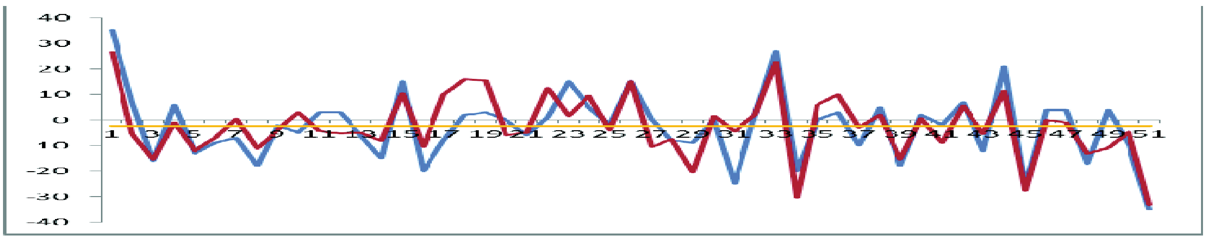


図7. 平均回帰に基づく収益推移

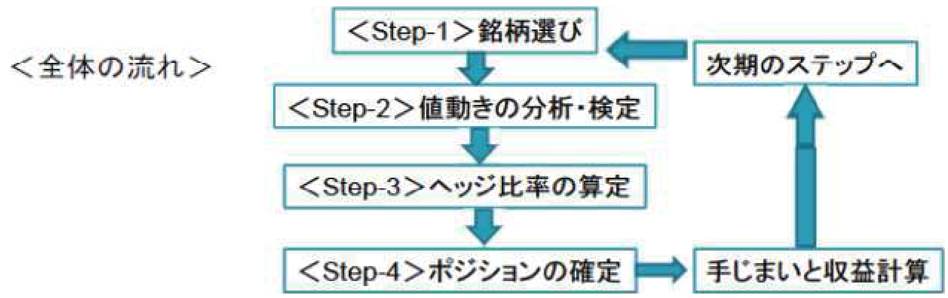


図 8.　ペアトレーディングの全体の流れ

つ二つの株式の値動きは、一時的に差が開くことがあっても、暫くすると、その差をなくそうと価格差が小さくなって、一定期間に同じような動きをする時期が存在する 2 銘柄を探し出す、と述べたが､そうそう簡単に求められるものではない。

そこで、

a. 銘柄間の相関を定量的に利用すること
b. 株価時系列にインプライドされた情報を引き出す

を目的に、銘柄どうしのユークリッド距離を算出し、さらに銘柄どうしの距離空間を作成し、この結果をもとに、サブドミナント・ウルトラ距離による階層樹形図を描き（図 9）、この樹形図からヘッジしたい銘柄に近い企業群と遠い企業群のグループを割り出すことにする。

銘柄別の一定期間の対数収益率に基づくグループ分類（クラスター分析手法による分類）2 銘柄間の対数収益率をユークリッド距離に求め、ユークリッド距離空間内でサブドミナント・ウルトラ距離に基づいた階層樹形図から企業の分類（図 9）を行うことにする。

ここでは、銘柄間、グループ間の距離がわかりやすい右の MST グラフを求める手法を採用する。

1）2 銘柄間の対数収益率の時系列の把握

T 期における銘柄 i の株価 $Y_i(T)$ に対し、対数収益率 S_i を次のように定義する

$$S_i(T) \equiv lnY_i(t) - lnY_i(T-1) \qquad (4.2)$$

ここで 2 つの銘柄 i,j に対し、対数収益率の直接的な変動の関連は相関係数 p_{ij} として

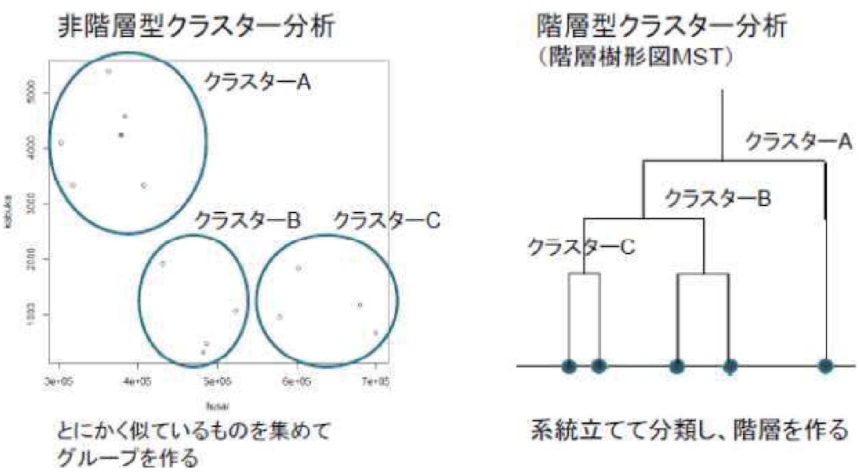


図 9.　クラスター分析の代表手法（2 種類）

$$\rho_{ij} = \frac{\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{\sqrt{\langle \langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2 \rangle \langle \langle S_j^2 \rangle - \langle S_j \rangle^2 \rangle}} \qquad (4.3)$$

と表せる。

ここで $\langle S_i \rangle$ は時間 t（1 期から n 期）に対する平均を表し、

$$\langle S_i \rangle \equiv \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} S_{it}$$

また、$\langle S_i^2 \rangle$ は 2 次モーメントで、(4.3) の分母は標準偏差どうしの積を表している。

$$\langle S_i^2 \rangle \equiv \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} S_{it}^2$$

2) 銘柄別の対数収益率の時系列の把握

二つの銘柄間の相対的距離と株価時系列に相対的に蓄えられた情報を引き出すために、銘柄間距離を求める。

最初に、$\tilde{S}_{it}$ を n 次元ベクトル $\tilde{S}_i$ の成分と考えて銘柄 $\tilde{S}_i$ を求める。

$$\tilde{S}_{it} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S_i(t) - \langle S_i \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2}} \qquad (4.4)$$

ここでも、$\langle S_i^2 \rangle$ は 2 次モーメントで、(4.4) の分母は標準偏差を表している。

銘柄 i に関して n 次元ベクトル $\tilde{S}_i$ の成分から銘柄 $\tilde{S}_i$ と銘柄 $\tilde{S}_i$ ユークリッド距離を次のように定義する。

3) サブドミナント・ウルトラ距離の定義

$$d^2{}_{ij} \equiv \left\| \tilde{\boldsymbol{S}}_i - \tilde{\boldsymbol{S}}_j \right\|^2 = \sum_{t=1}^{n} \left(\tilde{S}_{it} - \tilde{S}_{jt} \right)^2 \qquad (4.5)$$

(4.4) より $\tilde{S}_i$ の長さは 1 であり

$$\sum_{t=1}^{n} \tilde{S}_{it}^2 = 1 \qquad (4.6)$$

したがって銘柄 i と j について $d^2{}_{ij}$ は

$$d^2{}_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \left(\tilde{S}_{it}{}^2 + \tilde{S}_{jt}{}^2 - 2\tilde{S}_{it}\tilde{S}_{jt} \right) = 2 - 2\sum_{t=1}^{n} \tilde{S}_{it}\tilde{S}_{jt} \qquad (4.7)$$

ここで、(4.3) の相関係数 ρ_{ij} の定義から (4.7) は

$$d^2{}_{ij} = 2\left(1 - \rho_{ij}\right) \qquad (4.7)'$$

$$\therefore \quad d_{ij} = \sqrt{2\left(1 - \rho_{ij}\right)} \qquad (4.8)$$

4) サブドミナント・ウルトラ距離によるグループ分類

(4.8) より d_{ij} はピタゴラスの定理により以下の 3 点が自明だから

（i）　$d_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$

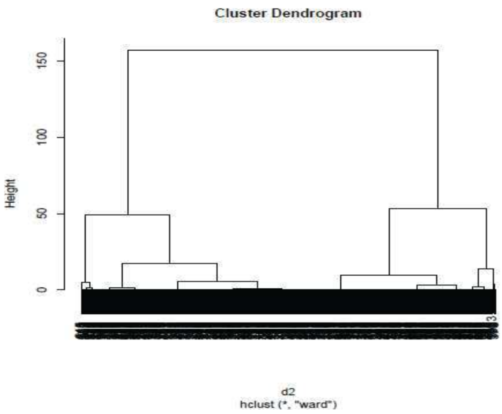
（ii）　$d_{ij} = d_{ji}$

（iii）　$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$

特に（iii）より、他の銘柄 k が集合に入っても、より距離の近いものどうしのグループ分類が行えることになる。

以上の式を用いて、先に例に挙げた銘柄 A,B,C が属する日本のハイテク関連企業として半導体関連をとりあげて、原材料提供メーカである化学メーカ群と、実際に半導体を製造にあたる電気機器メーカ群、さらに製品であるメモリやシステム LSI を部品として使用する電気機器から自動車を中心とする輸送機器メーカまで、日本国内の全上場企業から 560 社の株価を 2 分類する（図 10）。

＜2011年度の期首と期末の対数収益率による分析結果＞



第１グループの主な企業	企業数	234
日立製作所、信越化学、横河電機		
トヨタ自動車、本田技研工業、日産自動車		
東京エレクトロン（株）		
第２グループの主な企業	企業数	278
ルネサスエレクトロニクス、東芝、		
エルピーダメモリ、住友化学、		
富士通、日本電気、ソニー、パナソニック		
企業数　合計		512 社

※統計ソフトRはバージョン2.15.2を使用

図 10.　2011 年度の MST

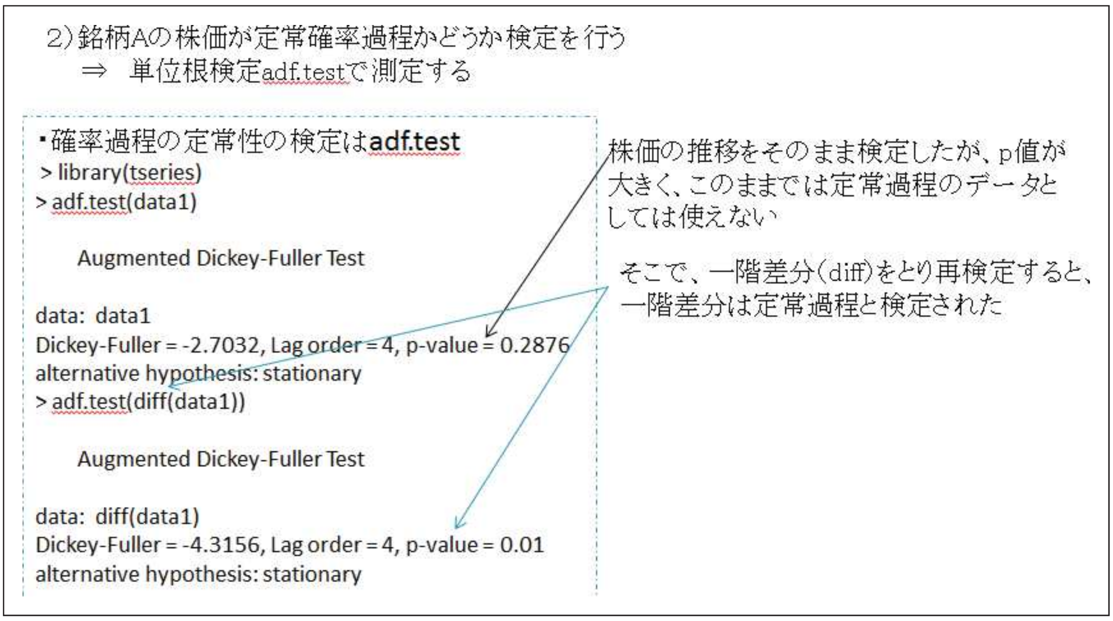
実際にこの中から第１グループから銘柄Ａを選び、第２グループから銘柄Ｂ、Ｃを選んでいる。確認のため、これらの銘柄を１章で行ったように、単回帰により相関係数を出して銘柄Ａ、Ｂのペアを選択した。

＜Step-2＞値動きの分析・検定

銘柄Ａに対して、銘柄Ｂを１対ｈで枚数（株数）をｈ枚あてて、ヘッジの程度を調整しながらリスク最小化枚数を探しる。

⇒　単回帰　$A_t = \alpha + hB_t + u_t$ の式を求め、ｈを求めれば、ボラティリティが最小になって、回帰直線の傾きｈ＝リスク最小化枚数となりる。

観測値（株価）がみるからに非定常確率過程で



※統計ソフトRはバージョン2.15.2を使用

図 11.　銘柄Ａについて定常確率過程かどうかの単位根検定の結果

ある場合、定常状態に変換してツールにかけるため、階差をとりる。1 階の階差を Δy_t とおくと、

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

となり、これは銘柄の収益を表している。

元の株価の対数をとって現系列とすれば、1 階の階差は対数収益率を表している。

いろいろな収益率が検定の対象に使われるが、今回は対数収益率を使うことにしる。

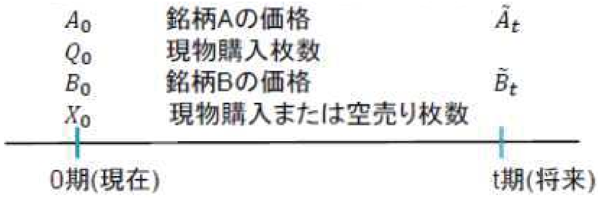
同様に銘柄 B についても単位根検定を行い、結果が良かったので、単回帰　$A_t = \alpha + hB_t + u_t$ の式を求め、h を求めた結果を示す。

- 図 12 の サ マ リ ー 表 か ら（B＝） h＝0.545819 とその p 値も 6.31e-08 と非常に小さく、右図の残差 u_t の状態も正規性がわかる。
- 残差の検定結果は p 値が 0.01 以下で非常に小さく、決定係数 R は 0.45 程度だが「単位根過程である」という帰無仮説は十分棄却される　⇒　定常過程
- したがって銘柄 A，B の対数収益率は共和分の関係にある＝平均回帰性が期待できる

以上のことがわかったので、カルマン・フィルターによるヘッジ枚数の逐次更新値を求める。

＜Step-3＞ヘッジ比率 h の算定

毎日あるいは毎週、過去 50 期～ 100 期程度のデータの回帰分析をおこないヘッジ比率を求めるのは、煩わしい話である。そこで、



として、

銘柄 A，B のポートフォリオからの収益 $\widetilde{\Pi}$ の基本モデルは；

$$\widetilde{\Pi} = (\tilde{A}_t - A_0)\ \bar{Q}_0 + (\tilde{B}_1 - B_0)X_0 \qquad (4\text{-}9)$$

となる。厳密には期間モデルの効用関数から A のポジションを所与として、期待効用を最大にするように求めた B のポジションからヘッジ比率を算出するのだが、そのプロセスをはしょって銘柄 A，B の損 ΔA_t、ΔB_t の共和分と定常確率過

＜Step-2＞値動きの分析・検定（続）

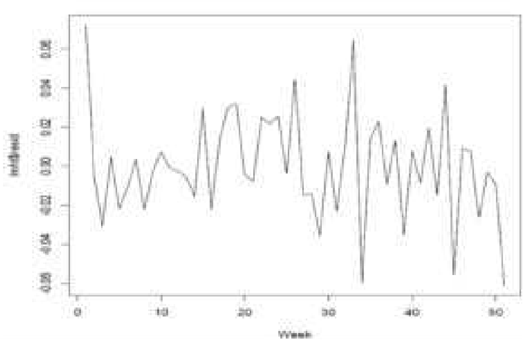
```
> summary(lmht)

Call:
lm(formula = A ~ B, data = lnrht)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.061033 -0.014686 -0.002577  0.013871  0.072096

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.005087   0.003877  -1.312    0.196
B            0.545819   0.085706   6.368 6.31e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.02768 on 49 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4529,     Adjusted R-squared: 0.4417
F-statistic: 40.56 on 1 and 49 DF,  p-value: 6.312e-08
```



※統計ソフトRはバージョン2.15.2を使用

図 12．銘柄 A,B について単回帰式を求めた結果

程の平均回帰性から、リスク最小化ヘッジ比率 h を求めると、

$$h \equiv \left(\frac{X_0}{\bar{Q}_0}\right) = -\frac{\widetilde{Cov}_0((\tilde{B}_t - B_0), (\tilde{A}_t - A_0))}{\widetilde{Var}_0(\tilde{B}_t - B_0)} = -\frac{Cov_0((\Delta\tilde{B}_t), (\Delta\tilde{A}_t))}{Var_0(\Delta\tilde{B}_t)} \qquad (4\text{–}10)$$

※ V_{ar} は分散、 C_{ov} は共分散を表す。

よってリスク最小化ヘッジ比率 h の回帰式は、カルマン・フィルターで逐次更新がきくように、1 階差分のダイナミック推定が使えるように書き換えると。

$$\Delta A_t = \alpha_t + h_t(\Delta B_t) + e_t \qquad (4\text{–}11)$$

観測データは元をそのままセットして、ARIMA（1,1,1）のようにして 1 階差分を使用する。

統計ソフトによっては、途中のパラメータ推移をすべて出力してくれるので、h_t の推定値の更新はそれを利用する。

＜Step-4＞ポジションの確定

・カルマン・フィルター適用後は逐次更新によりヘッジ比率がダイナミックに変化していることがわかる

・ボラティリティ最小化ヘッジ額も平均、分散ともに小さくなり、若干だがリスク減少となった。

表 3 における固定化したヘッジ比率 h と比較して；

・ヘッジ比率が固定の場合よりも、期待値（平均）で 0.0217 改善

・ボラティリティも 0.0174 改善し、リスク減少

表 4. ヘッジ比率の逐次更新により、リスク最小化ヘッジを実現した表

H53 fx

	A	B	C	D	E	F
1		銘柄Aの価格差	銘柄Bの価格差	ヘッジ比率	1対1ヘッジ	ボラティリティ最小化ヘッジ
35		-41	-21	0.56939	-20	-29.04281
36		12	12	0.56909	0	5.17092
37		17	14	0.56885	3	9.0361
38		4	14	0.56885	-10	-3.9639
39		-1	-6	0.56849	5	2.41094
40		-13	5	0.56849	-18	-15.84245
41		-1	-3	0.56847	2	0.70541
42		-16	-14	0.56822	-2	-8.04492
43		4	-3	0.56883	7	5.70649
44		1	13	0.56921	-12	-6.39973
45		2	-19	0.56897	21	12.81043
46		-29	-3	0.56881	-26	-27.29357
47		-4	-8	0.56912	4	0.55296
48		-6	-10	0.56868	4	-0.3132
49		-9	8	0.56785	-17	-13.5428
50		-26	-30	0.56785	4	-8.9645
51		1	11	0.545819	-10	-5.004009
52		-31	4	0.545819	-35	-33.183276
53						
54	平均	-2.1176	0.4314	0.5672	-2.5490	-2.3132
55	分散	15.7102	15.9512	0.0214	13.0794	11.9242
56	標準偏差	3.9636	3.9939	0.1463	3.6165	3.4531

※Microsoft　EXCEL2010を使用

となった。

5. まとめと今後の課題

本来のペアトレーディングは、CAPM に代表される市場ポートフォリオの平均の動きに沿って、リスク最小化ヘッジ比率を探す目的で作られたものである。

しかし、この場合、複数銘柄を選び日経平均とのヘッジ比率を毎日計算しながら売買していたのではたいへんな作業になってしまう。また日経平均の値そのものは銘柄ではないので売買も空売りもできないため、実際には、ヘッジ比率を参考にしながら、p 値や R 値をモニターしながら、損失の予測規模に応じて、取引を行う方がほとんどであろう。さらには、ある程度まとまった収益を確保するのであれば毎日必ず 2 銘柄の取引を行う必要もない。

ここで計算している期待値は、あくまでリスクヘッジの落ち着き先がどの辺か？といった値をとらえるに過ぎないので、もちろん他の手法で大きな収益を目指す人は、その戦略ポジションの取り方が優れた方法といえる。

ペアトレーディングの基本は、期待効用の最大化にあるので、直接的な収益の大小は度外視されることがかなりある。今回は、効用関数での検証は何も行っていないが、欧米の参考文献では確率・統計の面からの検証よりも、そちらの比重が高くて意外性を感じるかもしれないが、モデルの生まれを考慮いただければ、効用関数を使うことも必要な評価といえよう。

本文では、できる限りコンピュータ上に乗せられるプロセスを多くすることで、より使いやすいペアトレーディング手法を提案してきたつもりである。

＜今後の課題＞

ペアトレーディングは、実際の取引においては、二つの銘柄の値動きの山と谷をできるだけ解消してポートフォリオ全体で収益率を一定に保つ方法である。

しかし、今までみてきたように、データの定常性の検定やら、共和分からの平均回帰性の利用等、かなり細かいデータの検証が必要になる。

そんなわけで銘柄 A の収益を銘柄 B でヘッジするというのは、たいへんな作業で、 銘柄を特定して二つの株の収益推移を追いかけるのは現実問題としてかなり難しいことになる。

そこで、CAPM に基づく日経平均と観測データの回帰分析を行い自己回帰を見るのであれば、実際に取引可能な市場ポートフォリオのインデックス銘柄；日経 225 先物等を利用する方法もある。また価格推移との相関だけを重要視するのであれば、為替相場（特に円対米ドル相場）を基に為替先物や為替の価格推移との回帰を見ながら、ペアトレーディングに活用できることになる。

実際に、これらインデックス銘柄を利用して株との取引きでペアトレーディングを行っている方もいらっしゃるが、これらを使う時はモデルの評価が効用関数を利用したリスクのヘッジ度となるので、評価方法の新たな開発が重要になってくる。

本論では簡便にモデルを利用するため、効用関数評価を損益の共和分が平均回帰性を持つかどうかにポイントを絞った、事前に検定をおこない、利用できる期間を決めてから実施することに御留意いただきたい。

＜参考文献＞

[1] Ganapathy　Vidyamurthy 著、熊谷義彰、森谷博之 「実践的ペアトレーディングの理論」（パンローリング）　2006.11.8

[2] 樋口知之 「予測と発見の科学 6　データ

同化入門」 2011.9
[3] 横内大輔、青木義充 「現場ですぐ使える時系列データ分析」（技術評論社） 2014.3.25
[4] 福地純一郎、伊藤有希「Rによる計量経済分析」（朝倉書店） 2012.2.25
[5] 森平爽一郎 「カルマン・フィルターによるダイナミックな先物ヘッジ比率推定」早稲田大学ファイナンス研究科　森平ゼミ配布資料 2014.6
[6] 縄田和満 「経済学・ファイナンス理論」（東洋経済新報社） 2003.3
[7] Mantegna & Stanley 著、中嶋眞澄訳「経済物理学入門－ファイナンスにおける相関と複雑性－」（エコノミスト社） 2000.12
[8] 蓑谷千凰彦 「計量経済学の理論と応用」（日本評論社） 1996.5
[9] 北川源四郎、竹村彰道 「２１世紀の統計科学Ⅲ、数理・計算の統計科学」（東京大学出版会）2008.8
[10] 有本卓 「カルマン・フィルター」（産業図書）1978.4
[11] 片山徹 「新版　応用カルマン・フィルター」（朝倉書店） 2000.1